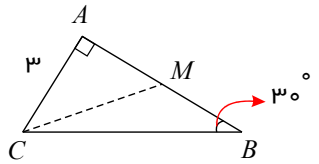
مجموعه تست مثلثات ۵

مدرس : مسعود یکتا

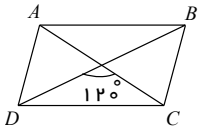
دبیرستان هاشمی نژاد ۱

۱) در شکل زیر ، $AC = ۳$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$. اگر M وسط AB باشد، مساحت مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۵}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۲) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اندازه‌ی قطرها برابر ۶ و ۱۲ و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۲۰° است. مساحت مثلث ACD کدام است؟

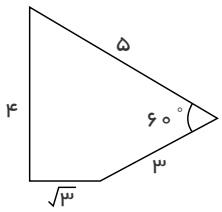


۱) $۱۸\sqrt{۳}$ ۲) $۹\sqrt{۳}$ ۳) ۱۸ ۴) ۹

۳) اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

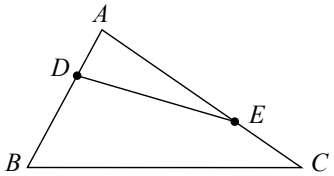
۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۴) مساحت شکل زیر چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۲۳\sqrt{۳}}{۴}$

۵) در شکل مقابل $۳AD = AB$ و $۳EC = AC$ ، مساحت مثلث ADE چه نسبتی از مساحت مثلث ABC است؟

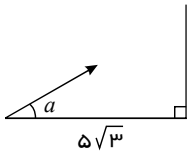


۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۶) در یک متوازی‌الاضلاع، یکی از قطرها دو برابر دیگری و زاویهٔ بین دو قطر ۳۰° است. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ۳۲ واحد مربع باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) $۸\sqrt{۲}$

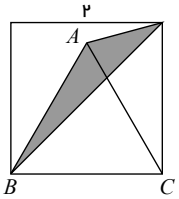
۷) مطابق شکل زیر، گلوله‌ای در فاصلهٔ $۵\sqrt{۳}$ متری از یک دیوار با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ و با زاویهٔ حادهٔ α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. می‌دانیم مسافت افقی طی شده (d) برحسب سرعت پرتاب گلوله (v) و زاویهٔ پرتاب (α) از رابطهٔ $d=\frac{v^۲\sin ۲\alpha}{۱۰}$ به‌دست می‌آید. حدود α کدام باشد تا گلوله قبل از رسیدن به زمین به دیوار برخورد کند؟



۱) $\frac{\pi}{۱۲}<\alpha<\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۸}<\alpha<\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

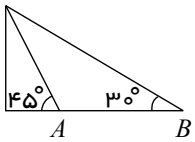
۸) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC درون یک مربع به طول ضلع ۲ قرار گرفته است. مساحت مثلث رنگی کدام است؟ $(\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲})$



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

۹) از نوک پرچمی دو کابل در نقاط مشخص شده و در یک طرف دیگر به زمین متصل شده اند. اگر ارتفاع تیر $۲\sqrt{۲}$ متر باشد فاصله‌ی دو نقطه کدام است؟



۱) $۲(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$ ۲) $\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$

۳) $۲(\sqrt{۶}+۲\sqrt{۲})$ ۴) $۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$

۱۰) در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت $۱۲\sqrt{۲}$ ، طول اضلاع برابر ۶ و ۴ است. اندازه‌ی یک زاویه‌ی این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۳۵°

۱۱) اگر در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داشته باشیم $\cos(\hat{A}-\hat{B})+\sin(\frac{\hat{B}}{۲}+\hat{C})=۲$، نوع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه غیر متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۳) متساوی الاضلاع ۴) مختلف‌الاضلاع با یک زاویهٔ بزرگ‌تر از ۹۰°

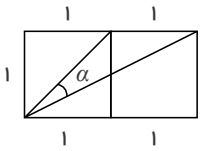
۱۲) در متوازی‌الاضلاعی به اضلاع ۶ و ۴، مساحت برابر $۱۲\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ یک زاویهٔ متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۱۳۵° ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۱۴۵°

۱۳) یکی از زوایای مثلثی ۶۰° است. اگر با ثابت ماندن طول دو ضلع مجاور زاویه، زاویه را ۱۵° کوچک کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۱۴) در مستطیل روبه‌رو، $\sin\alpha$ کدام است؟

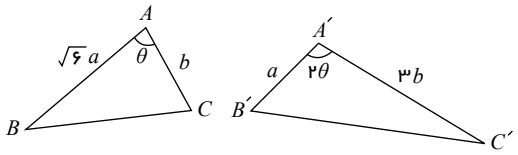


۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$

۱۵) طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ به‌صورت $a=۳\sqrt{۲}$ و $b=۴$ و زاویهٔ بین آن‌ها θ است. اگر θ را ۷۵° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{۲}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۶) اگر $\tan\theta = \sqrt{۷}$ باشد، نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۳

۴) ۲

۱۷) مساحت متوازی‌الاضلاعی که یکی از قطرهای آن ۱۲ و زاویهٔ بین دو قطر ۱۲۰ درجه باشد، برابر $۱۸\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ قطر دیگر کدام است؟

۱) ۳

۲) ۶

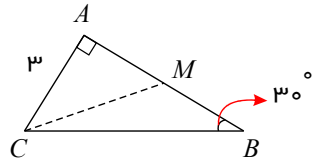
۳) ۱۲

۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ (۱) (۲) (۳) **(۴)** ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است $\leftarrow BC = ۶$

ضلع روبرو به زاویه‌ی $(\hat{C})۶۰^\circ$ ، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است $\leftarrow AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶) = ۳\sqrt{۳}$



از طرفی: $MB = \frac{AB}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$$S_{\overset{\triangle}{MBC}} = \frac{۱}{۲}MB \times BC \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲})(۶)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{۸} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴) مساحت متوازی الاضلاع برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها می‌باشد.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۲ \times \sin ۱۲۰ = ۳۶ \sin ۶۰ = ۳۶(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۱۸\sqrt{۳}$$

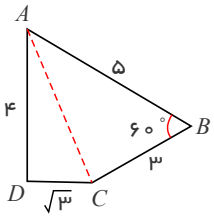
مساحت مثلث ACD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع، یعنی $۹\sqrt{۳}$ می‌باشد.

۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)** مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به‌دست می‌آید.

$$S = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ) = (۴۸\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲۴ \times ۳ = ۷۲$$

۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

مساحت شکل مقابل برابر است با:



$$S = S_{\overset{\triangle}{ADC}} + S_{\overset{\triangle}{ACB}} \rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۴} \\ S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۵ \times ۳ \times \sin ۶۰^\circ}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} \end{cases}$$

پس: $S = \frac{۸\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲۳\sqrt{۳}}{۴}$

۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با نوشتن نسبت مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}(AD \cdot AE \cdot \sin A)}{\frac{۱}{۲}(AB \cdot AC \cdot \sin A)} = (\frac{AD}{AB}) \cdot (\frac{AE}{AC}) = (\frac{AD}{۳AD}) \cdot (۱ - \frac{EC}{AC}) = \frac{۱}{۳}(\frac{AC - EC}{AC})$$

$$= \frac{۱}{۳}(۱ - \underbrace{\frac{EC}{AC}}_{۲EC}) = (\frac{۱}{۳}) \times (۱ - \frac{۱}{۳}) = \frac{۲}{۹}$$

۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴) مساحت متوازی‌الاضلاع از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویهٔ بین دو قطر به‌دست می‌آید.

قطرها را x و $۲x$ در نظر می‌گیریم:

$$S = \frac{۱}{۲}(x)(۲x)\sin ۳۰^\circ \Rightarrow ۳۲ = \frac{۱}{۲}(۲x^۲)(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۳۲ = \frac{x^۲}{۲} \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸$$

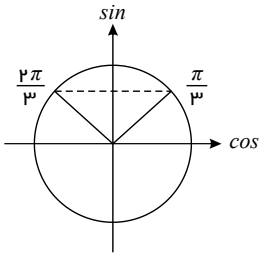
۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴) برای آنکه گلوله قبل از برخورد به زمین به دیوار برخورد کند، باید فاصلهٔ افقی طی شدهٔ آن بزرگ‌تر از $۵\sqrt{۳}$ باشد، پس داریم:

$$d > ۵\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{v^۲ \sin ۲\alpha}{۱۰} > ۵\sqrt{۳} \xrightarrow{v=۱۰} \sin ۲\alpha > \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

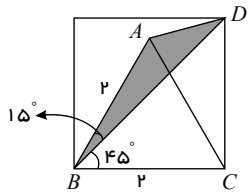
چون α زاویهٔ حاده است، پس ۲α از ۰ تا π می‌تواند باشد. سینوس زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ در این بازه برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. طبق دایرهٔ مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{۳} < ۲\alpha < \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$$

به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۶}$ و $\alpha = \frac{\pi}{۳}$ گلوله پای دیوار فرود می‌آید و به‌ازای $\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ گلوله بالاتر از سطح زمین به دیوار برخورد می‌کند.



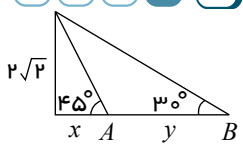
۸ (۴) (۳) **(۲)** (۱) چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، پس $AB = BC = ۲$ می‌باشد. به‌علاوه BD قطر مربع و برابر با $۲\sqrt{۲}$ است. زاویهٔ $A\hat{B}D$ برابر با $۶۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۵^\circ$ است. پس:



$$\longrightarrow S_{ABD} = \frac{۱}{۲} AB \times BD \times \sin ۱۵^\circ$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲} = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲-\sqrt{۳}} = \sqrt{۴-۲\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲} = |\sqrt{۳}-۱| = \sqrt{۳}-۱$$

۹ **(۴)** (۳) (۲) (۱)



$$\tan ۴۵ = \frac{۲\sqrt{۲}}{x} \to ۱ = \frac{۲\sqrt{۲}}{x} \to x = ۲\sqrt{۲}$$

$$\tan ۳۰ = \frac{۲\sqrt{۲}}{x+y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}}{x+y} \to x+y = \frac{۶\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۶}$$

پس: $x+y = ۲\sqrt{۶} \to ۲\sqrt{۲}+y = ۲\sqrt{۶} \to y = ۲(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$

۱۰ **(۴)** (۳) (۲) (۱) مساحت متوازی الاضلاعی که طول اضلاع آن a و b و زاویه‌ی بین اضلاع آن θ است برابر است با: $S = ab\sin\theta$

چون مساحت برابر $۱۲\sqrt{۲}$ و طول اضلاع برابر ۶ و ۴ است، بنابراین:

$$۱۲\sqrt{۲} = ۶ \times ۴ \times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ$$

که باتوجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۱۱ **(۳)** (۴) (۲) (۱) بیش‌ترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. وقتی جمع یک سینوس و کسینوس برابر ۲ شده باشد، یعنی هر دو مقدار برابر ۱ است. یعنی داریم:

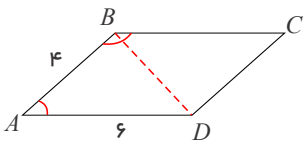
$$\begin{cases} \sin(\frac{\hat{B}}{۲}+\hat{C}) = ۱ \to \frac{\hat{B}}{۲}+\hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} \\ \cos(\hat{A}-\hat{B}) = ۱ \to \hat{A}-\hat{B} = ۰ \to \hat{A} = \hat{B} \end{cases}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \to \hat{B}+\hat{B}+۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

$$\to ۳\frac{\hat{B}}{۲} = ۹۰^\circ \to \hat{B} = ۶۰^\circ \to \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۱۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) مساحت متوازی‌الاضلاع دو برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ است. و می‌دانیم که مساحت مثلث از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بینشان به‌دست می‌آید.



$$S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \sin\hat{A} = ۱۲ \times \sin\hat{A}$$

$$S_{ABCD} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABD}} = ۲۴\sin\hat{A} = ۱۲\sqrt{۲} \to \sin\hat{A} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \hat{A} = ۴۵^\circ$$

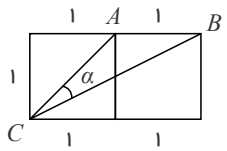
$\rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۱۳۵^\circ$

۱۳ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم مساحت مثلث از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بینشان به‌دست می‌آید.

اگر زاویه را ۱۵° کم کنیم برابر ۴۵° می‌شود، بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر است با :

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{\frac{۱}{۲}(a \cdot b \cdot \sin ۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}(a \cdot b \cdot \sin ۶۰^\circ)} = \frac{\sin ۴۵}{\sin ۶۰} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴



$$\rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱ \times ۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ AC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۲} \ , \ BC^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ = ۵ \Rightarrow BC = \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} CA \times CB \times \sin\alpha \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۲} \times \sqrt{۵} \sin\alpha = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۰} \sin\alpha = ۱ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

۱۵ ۱ ۲ ۳ **۴** مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع است.

$$S = \frac{۱}{۲} ab \sin\theta \Rightarrow ۶ = \frac{۱}{۲} \times ۳\sqrt{۲} \times ۴ \sin\theta \Rightarrow ۶ = ۶\sqrt{۲} \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$\Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$ یا ۱۳۵°

چون θ را ۷۵° کاهش داده‌ایم، پس $\theta = ۱۳۵^\circ$ قابل قبول است.

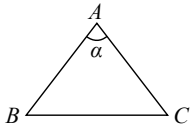
$$\theta' = ۱۳۵^\circ - ۷۵^\circ = ۶۰^\circ \ , \ a' = \sqrt{۲}a = \sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۶ \ , \ b' = \sqrt{۲}b = \sqrt{۲} \times ۴ = ۴\sqrt{۲}$$

$$S' = \frac{۱}{۲} a'b' \sin\theta' = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۲} \sin ۶۰^\circ = ۱۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۶} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{۶\sqrt{۶}}{۶} = \sqrt{۶}$$

۱۶ **۱** ۲ ۳ ۴

توجه کنید که همواره داریم:

نکته:



$$\rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin ۲\theta}{\frac{۱}{۲} AB \cdot AC \cdot \sin\theta} = \frac{a \times ۳b \sin ۲\theta}{\sqrt{۶}a \times b \sin\theta} = \frac{۳ \times ۲ \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{۶} \sin\theta} = \frac{۶}{\sqrt{۶}} \cos\theta$$

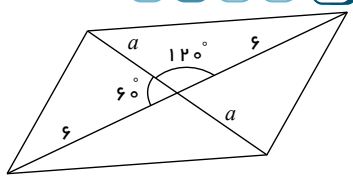
$$۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow ۱ + (\sqrt{۷})^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \cos^۲\theta = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

θ باید حاده باشد، زیرا در غیر این صورت ۲θ نمی‌تواند زاویهٔ یک مثلث باشد، پس داریم:

$$\cos\theta = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{۶}{\sqrt{۶}} \times \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۲}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۷ ۱ **۲** ۳ ۴ مساحت مثلث از نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بینشان به‌دست می‌آید.

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



قطرهای یک متوازی‌الاضلاع، آن را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

به‌کمک مساحت یکی از مثلث‌ها، مساحت متوازی‌الاضلاع را می‌یابیم:

$$S = ۴ \times (\frac{۱}{۲} \times ۶ \times a \times \sin ۱۲۰^\circ) = ۱۸\sqrt{۳} \Rightarrow S = ۶a\sqrt{۳} = ۱۸\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۳$$

قطر $= ۲a = ۶$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	۳	**۴**
۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۱۶	**۱**	۲	۳	۴
۱۷	۱	**۲**	۳	۴